Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Επίκ. Καθ. Γ. Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ IV

3 Φεβρουαρίου 2015

Θέμα 1. [3] Έστω το υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \le z \le a\}, \quad a > 0.$$

(α΄) Υπολογίστε

(i) τον όγκο του B,

(ii) το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_B (x^2 + y^2)\, z \; d(x, y, z)$,

(iii) το εμβαδό του συνόρου ∂B,

(iv) το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{\partial B} \sqrt{1 + 4z}\; d\sigma$,

(β΄) Εκφράστε τον όγκο του B μέσω μιας κατάλληλης συνεχώς διαφορίσιμης $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ και ενός κατάλληλου επιφανειακού ολοκληρώματός της.

(γ΄) Έστω $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ συνεχώς διαφορίσιμη. Θεωρώντας τις επιφάνειες

$$S_1 = \partial B \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \ge a\} \quad \text{και} \quad S_2 = \partial B \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \le a\}$$

ως τα γραφήματα δύο συναρτήσεων, δείξτε ότι

$$\int_{S_1} (\nabla \times F) \cdot n \, d\sigma = \int_{S_2} (\nabla \times F) \cdot n \, d\sigma \qquad (\nabla \times F = \operatorname{curl} F = \operatorname{rot} F).$$

Θέμα 2. [1] Δείξτε ότι για κάθε σταθερό $c > 0$ το σύνολο

$$B_{f,g} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \big(x - f(z)\big)^2 + \big(y - g(z)\big)^2 \le c, \quad z \in [a, b]\}$$

έχει τον ίδιο όγκο για όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f,\ g : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Θέμα 3. [1.2] Έστω η καμπύλη $\bar{\gamma}(t) = e^{-t}(\cos t, \sin t), \quad t \ge 0$.

(α΄) Σχεδιάστε την εικόνα της καμπύλης $\bar{\gamma}([0, \infty))$.

(β΄) Υπολογίστε το μήκος της $\bar{\gamma}$ καθώς και τα ολοκληρώματα

$$\int_{\bar{\gamma}} (x^2 + y^2)\, ds \quad \text{και} \quad \int_{\bar{\gamma}} (-y, x) \cdot d(x, y).$$

Θέμα 4. [0.8]

(α΄) Αν $D \subset \mathbb{R}^2$ ο μοναδιαίος κυκλικός δίσκος και ∂D το θετικά προσανατολισμένο σύνορό του, υπολογίστε με τη βοήθεια του Θεωρήματος του Green το ολοκλήρωμα

$$\int_{\partial D} (x - y^3, x^3 - y^2) \cdot d(x, y).$$

(β΄) Πώς μπορείτε να κρίνετε <u>μόνο από το αποτέλεσμα στο (α΄)</u> αν η $(x, y) \mapsto (x - y^3, x^3 - y^2)$ είναι πεδίο κλίσεων;

Θέμα 5. [2] Έστω $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \mathbb{R}^n$, $r_1, r_2 > 0$, $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχείς με $f(\bar{y}) = 0 \ \forall\ \bar{y} \notin B(\bar{x}_1, r_1)$, $g(\bar{y}) = 0 \ \forall\ \bar{y} \notin B(\bar{x}_2, r_2)$ και $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $r = \|\bar{x}\| + \|\bar{x}_1\| + \|\bar{x}_2\| + r_1 + r_2$. Δείξτε ότι

$$\int_{B(\bar{0},R)} f(\bar{x} - \bar{y})\, g(\bar{y})\, d\bar{y} = \int_{B(\bar{x},R)} f(\bar{y})\, g(\bar{x} - \bar{y})\, d\bar{y} = \text{σταθερό ως προς } R \ge r.$$

Θέμα 6. [1] Έστω $D \subset \mathbb{R}$ και $f_n,\ g_n : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, φραγμένες συναρτήσεις. Δείξτε ότι:

(α΄) οι (f_n), (g_n) συγκλίνουν ομοιόμορφα $\implies$ η $(f_n g_n)$ συγκλίνει ομοιόμορφα,

(β΄) το (α΄) δεν ισχύει απαραίτητα αν οι f_n, $n \in \mathbb{N}$, δεν είναι φραγμένες συναρτήσεις.

Θέμα 7. [1] Αναπτύσσοντας το υπερβολικό συνημίτονο $\cosh(\alpha x)$ για $x \in [-\pi, \pi]$ ($\alpha \ne 0$ σταθερό) σε σειρά Fourier, δείξτε ότι ισχύει ο ακόλουθος τύπος για την υπερβολική συνεφαπτομένη:

$$\pi \coth(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2} \qquad \forall\ \alpha \ne 0.$$

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας!
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!